Л.Я. Савельев
(*Новосибирск*)

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

В статье рассматривается вариант вероятностной модели экспертных оценок и примеры ее применения к двум задачам. Первая – экспертная оценка влияния различных факторов на межнациональные отношения школьников Новосибирска. Вторая – экспертное прогнозирование эффективности комплекса мероприятий.

Ключевые слова: межнациональные отношения, эффективность, экспертная оценка, нормирование, шкала, вероятность, случайная переменная, распределение, среднее значение, математическое ожидание.

1. Постановка задачи и примеры

Рассмотрим группу m экспертов, которым присвоены номера $i = 1, \ldots, m$. Эксперт с номером i оценивает каждое $j = 1, \ldots, n$ данных высказываний числом $x[i, j] \geq 0$. Компетентность i-го эксперта по теме j-го высказывания оценивается числом $c[i, j] \geq 0$. Кроме того, общая компетентность i-го эксперта по данной тематике оценивается числом $s[i] \geq 0$. Для простоты часто будем отождествлять экспертов и высказывания с присвоенными им номерами.

Данные экспертами оценки можно представить матрицей X, на j-м месте i-го столбца которой помещена оценка $x[i, j]$ для i-го эксперта и j-го высказывания. Такое транспонирование удобно,

Лев Яковлевич Савельев – доктор физико-математических наук, профессор Новосибирского государственного университате. E-mail: savelev@math.nsc.ru.

когда число экспертов больше числа высказываний. Оценки компетентности экспертов по узким темам рассматриваемых высказываний можно представить матрицей C, на j-м месте i-го столбца которой помещена оценка $c[i, j] \geq 0$ компетентности i-го эксперта по теме j-го высказывания. Если эксперты по теме каждого высказывания считаются одинаково компетентными ($c[i, j] = c[j]$, $1 \leq j \leq n$), то вместо матрицы можно рассматривать строку C, на j-м месте которой помещена оценка $c[j]$ компетентности эксперта по теме j-го высказывания. Оценки общей компетентности экспертов по данной тематике можно представить строкой S, на j-м месте которой помещена оценка $s[i] \geq 0$ общей компетентности i-го эксперта. Нужно вывести общие экспертные оценки высказываний с учетом компетентности экспертов.

1.1. Пример с факторами влияния. В книге Д.В. Ушакова [1] исследуется влияние различных факторов на формирование этнического самосознания школьников. После некоторой группировки и нумерации эти факторы можно свести к следующим объединенным факторам с условными названиями *семья (1), школа (2), улица (3), культура (4), религия (5).* Используя данные опроса, проведенного среди классных руководителей школ Новосибирска, и выбрав для примера 10 анкет, можно сформулировать следующую задачу об экспертной оценке. Группа $m = 10$ экспертов оценивает влияние $n = 5$ указанных факторов. Компетентность каждого из экспертов в вопросе, к которому относится j-й фактор, оценивается по 5-балльной шкале и считается одинаковой для всех экспертов:
$C = \{4, 5, 3, 4, 3\}$ ($c[1] = 4$, $c[2] = 5$, $c[3] = 3$, $c[4] = 4$, $c[5] = 3$).

Предлагаемые оценки конкретной компетентности экспертов достаточно произвольны. В качестве альтернативы можно считать, что компетентности всех экспертов по теме каждого данного вопроса одинаковы:
$C = \{1, 1, 1, 1, 1\}$ ($c[j] = 1$, $1 \leq j \leq 5$).

Для оценки общей компетентности i-го эксперта по данной тематике используется стаж $s[i]$ его работы в школе. В примере стаж экспертов в годах описывается строкой $S = \{12, 25, 26, 37, 16, 21, 10, 16, 5, 15\}$, на i-м месте которой помещен стаж $s[i]$ эксперта с номером $i = 1, 2, \ldots, 10$.

Так как компетентность эксперта не всегда определяется его стажем, то в качестве альтернативы можно считать, что общая компетентность экспертов одинакова, и использовать строку
$S = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ ($s[1] = 1, 1 \le i \le 5$).

Эксперты применяют 10-балльную шкалу $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Выставленные ими оценки представляются матрицей, на j-м месте i-го столбца которой помещен балл $x[i, j]$ – оценка j-го фактора i-м экспертом:

$$X = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 10 & 10 & 3 & 8 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 4 & 10 & 4 & 7 & 6 & 6 & 8 & 8 & 8 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 7 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 5 \\ 6 & 6 & 5 & 5 & 8 & 3 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 2 & 5 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.2. Пример с прогнозом эффективности. В статье Л.Т. Баранова, Ф.И. Птушкина, А.В. Трусова [2] предлагается метод анализа данных экспертного опроса, опирающийся на нечеткую интерпретацию данных, и описывается пример применения этого метода к прогнозу технического состояния объекта в результате предлагаемого комплекса мероприятий. В этом примере рассматривается группа экспертов из $m = 2$ человек, которая оценивает влияние на техническое состояние объекта результата выполнения определенного объема работ, выражаемое в процентах изменения эффективности: –75, –50, –25, 0, 25, 50, 75. Для упрощения записей заменим эти числа порядковыми номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Оценки выбираются из интервала $x = [0,1]$. Компетентность каждого из экспертов по каждому из рассматриваемых 7 уровней изменения эффективности предполагается одинаковой и формально считается, что $C = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ ($c[j] = 1, 1 \le j \le 7$).

Общая компетентность 1-го и 2-го экспертов вычисляется в статье [2] по определенной методике и выражается строкой $S = \{0, 3, 1\}$ ($s[1] = 0{,}3$, $s[2] = 1$).

Выставленные экспертами оценки представляются матрицей X, на j-м месте i-й строки которой помещено число $x[i, j]$ – оценка j-го фактора i-м экспертом:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & 0{,}4 & 1 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}6 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Вероятностная модель

В этой модели распределения относительных оценок компетентности экспертов и общие экспертные оценки рассматриваемых высказываний определяются как средние значения данных экспертами индивидуальных оценок.

Предполагаются известными: число m экспертов и их номера i; число n высказываний и их номера j; матрица X, на j-м месте i-го столбца которой помещена оценка $x[i, j] \geq 0$ для i-го эксперта и j-го высказывания; матрица C, на j-м месте i-го столбца которой помещена оценка $c[i, j] \geq 0$ компетентности i-го эксперта по теме j-го высказывания; строка S, на i-м месте которой помещена оценка $s[i] \geq 0$ общей компетентности i-го эксперта по данной тематике. Подчеркнем, что все рассматриваемые величины предполагаются положительными (≥ 0).

2.1. Распределения. Заменим оценку $c[i, j]$ компетентности i-го эксперта по теме j-го высказывания нормированной оценкой

$$q[i, j] = c[i, j] \Big/ \sum_{k=1}^{n} c[i, k] \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n).$$

Предполагается, что знаменатель строго положителен (≥ 0). Строка $Q[i] = \{q[i, 1], q[i, 2], \ldots, q[i, n]\}$ ($1 \leq i \leq m$) описывает распределение компетентности i-го эксперта по темам рассматриваемых высказываний: $q[i,\, j] \ge 0,\ \sum_{j=1}^{n} q[i,\, j] = 1.$

Таким образом, матрица C заменяется матрицей Q, на j-м месте i-го столбца которой помещена взвешенная оценка $q[i, j] \ge 0$ компетентности i-го эксперта по теме j-го высказывания. Если эксперты по теме каждого высказывания считаются одинаково компетентными ($q[i, j] = q[j]$, $1 \le j \le n$), то вместо матрицы можно рассматривать строку Q, на j-м месте которой помещена взвешенная оценка $q[j]$ компетентности экспертов по теме j-го высказывания. Если компетентности всех экспертов по каждому рассматриваемому вопросу одинаковы, то можно формально считать, что $c[j] = 1$, $q[j] = 1/n$ ($1 \le j \le n$). При таком равномерном взвешивании меняется только масштаб данных экспертами оценок. Соотношение между ними остаются прежними.

Точно так же заменим абсолютную оценку $s[i]$ общей компетентности i-го эксперта по данной тематике нормированной оценкой $t[i] = s[i] / \sum_{i=1}^{m} s[k]$. Здесь также предполагается, что знаменатель строго положителен. Строка $T = \{t[1], t[2], \ldots, t[m]\}$ описывает распределение оценок общей компетентности экспертов: $t[i] \le 0,\ \sum_{j=1}^{m} t[i] = 1.$ Если общая компетентность в рассматриваемом круге вопросов у всех экспертов одинакова, то можно формально считать, что $s[i] = 1$, $t[i] = 1/m$ ($1 \le i \le m$). При таком равномерном взвешивании меняется только масштаб общих экспертных оценок. Порядковые соотношения между ними остаются прежними.

2.2. Средние значения. Взвешенную оценку $u[i, j]$ для i-го эксперта и j-го высказывания, учитывающую его компетентность в соответствующей узкой области, определим равенством
$u[i, j] = q[i, j]x[i, j]$ ($1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$).

Взвешенные индивидуальные оценки представляются матрицей U, на j-м месте i-го столбца которой помещена оценка $u[i, j]$ для i-го эксперта и j-го высказывания. Общую оценку $v[j]$ для j-го высказывания, данную группой экспертов, учитывая общую компетентность каждого из них в рассматриваемой широкой области, определим как среднее значение взвешенных индивидуальных оценок экспертов: $V[j] = \sum_{i=1}^{m} t[i]u[i, j] \ (1 \le j \le n)$.

Строка $V = \{v[1], v[2], \ldots, v[n]\}$ описывает общие экспертные оценки рассматриваемых высказываний в дважды взвешенной шкале. Эта шкала формальна, и ее трудно содержательно интерпретировать. Для унификации полученные оценки целесообразно нормировать и перевести в универсальную шкалу со значениями в отрезке [0,1]. Это естественно сделать двумя способами: с помощью их общей суммы или с помощью максимальной полученной оценки. Исключим тривиальные случаи и будем предполагать сумму s и максимум v строго положительными (>0). Из строки V получаются строки

$P = \{p[1], p[2], \ldots, p[n]\}$

$R = \{r[1], r[2], \ldots, r[n]\}$,

где $p[j] = v[j]/s \ \left(s = \sum_{k=1}^{n} v[k], 1 \le j \le n \right)$

$r[j] = v[j]/v \quad (v = Max[v[k], \ 1 \le j \le n])$.

Ясно, что $0 \le p[j], \ r[j] \le 1, \ \sum_{j=1}^{n} p[j] = 1$.

Строка P описывает распределение, связанное с полученными общими экспертными оценками рассматриваемых высказываний. Число $p[j]$ характеризует долю j-го высказывания в совокупности всех рассматриваемых высказываний. Число $r[j]$ описывает относительную значимость j-го высказывания. Строки P и R являются решениями поставленной задачи.

Если компетентности всех экспертов по каждому рассматриваемому вопросу одинаковы и одинакова общая компетентность в данном круге вопросов у всех экспертов, то можно формально считать, что $c[j]=1$ $s[i]=1$ $q[j]=1/n$ $t[i]=1/m$ $(1 \le i \le m; 1 \le j \le n)$.

В этом случае

$$a[j]=n\,v[j]=n\sum_{i=1}^{m} t[i]q[j]x[i,j]=n\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{m}\frac{1}{n}x[i,j]=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x[i,j].$$

Строка $A = \{a[1], a[2], \ldots, a[n]\}$ описывает средние арифметические данных экспертами оценок рассматриваемых высказываний. Эти средние не зависят от оценок квалификации экспертов.

2.3. Порядковые свойства. Оценки $v[j]$, $p[j]$, $r[j]$ имеют формальный характер, и их не всегда можно содержательно интерпретировать. Если экспертные оценки выражают значимость изучаемых высказываний, то целесообразно рассматривать порядковые свойства этих оценок, расположив высказывания по убыванию оценок:

$$W = \{w[1], w[2], \ldots, w[n]\},$$

где $w[1] = v[j[1]] \ge w[2] = v[j[2]] \ge \ldots \ge w[n] = \mathrm{v}[j[n]]$.

По упорядоченной строке W можно составить строку $J = \{j[1], j[2], \ldots, j[n]\}$ номеров высказываний, располагающихся по убыванию полученных оценок значимости этих высказываний. Высказывания с равными оценками располагаются на соответствующих местах произвольно. Та же строка номеров получится при замене чисел $v[j[k]]$ числами $p[j[k]]$ или $r[j[k]]$. Высказывание с номером $j[1]$ по экспертной оценке является наиболее значимым, а высказывание с номером $j[n]$ – наименее значимым. Строки P и R позволяют сравнивать относительную значимость различных высказываний. Строка J меньше других зависит от предлагаемых формальных преобразований исходных оценок $x[i, j]$, данных экспертами. Ее можно считать наиболее надежным результатом экспертизы. Другими словами, результаты экспертизы целесообразно представлять в порядковой шкале, а не в абсолютной.

2.4. Вычислительный алгоритм. Таким образом, чтобы вычислить экспертные оценки по предлагаемой методике нужно сделать следующее.

1-й шаг. Записать:

1) число m привлеченных экспертов и их номера i;

2) число n рассматриваемых высказываний и их номера j;

3) матрицу X, на j-м месте i-го столбца которой помещена оценка $x[i, j] \geq 0$ для i-го эксперта и j-го высказывания;

4) матрицу C, на j-м месте i-го столбца которой помещена оценка $c[i, j] \geq 0$ компетентности i-го эксперта по теме j-го высказывания;

5) строку S, на j-м месте которой помещена оценка $s[i] \geq 0$ общей компетентности i-го эксперта по данной тематике.

2-й шаг. Вычислить суммы $\gamma[i] = \sum_{j=1}^{n} c[i, j]$, $\sigma = \sum_{i=1}^{m} s[i]$ и отношения $t[i] = s[i]/\sigma$, $q[i, j] = c[i, j]/\gamma[i]$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$.

3-й шаг. По формуле $v[j] = \sum_{i=1}^{m} t[i]q[i, j]x[i, j]$ $(1 \leq j \leq n)$ вычислить предлагаемую общую экспертную оценку $v[j]$ для j-го высказывания.

4-й шаг. Вычислить величины $s = \sum_{r=1}^{m} v[k]$, $v = Max[v[k] > 0,$ $1 \leq k \leq n]$ и отношения $p[j] = v[j]/s$, $r[j] = v[j]/v$ $(1 \leq j \leq n)$, характеризующие соответственно долю j-го высказывания в совокупности всех рассматриваемых высказываний и относительную роль j-го высказывания по данным экспертным оценкам.

5-й шаг. Выписать высказывания в порядке убывания их экспертных оценок. (Высказывания с равными оценками располагаются на соответствующих местах произвольно.)

Замечания. Если эксперты по теме каждого высказывания считаются одинаково компетентными ($c[i, j] = c[j]$, $1 \le j \le n$), то вместо матрицы можно рассматривать строку C, на j-м месте которой помещена оценка $c[j]$ компетентности экспертов по теме j-го высказывания. Если компетентности всех экспертов по каждому изучаемому вопросу одинаковы, то можно формально считать, что ($c[j] = 1$, $1 \le j \le n$).

Если общая компетентность в рассматриваемом круге вопросов у всех экспертов одинакова, то можно формально считать, что ($s[i] = 1$, $1 \le i \le m$). Если оценивается значимость анализируемых высказываний, то их расположение в порядке убывания оценок означает расположение по уменьшению придаваемой экспертами этим высказываниям значимости. Первым становится высказывание, которое по экспертной оценке считается наиболее значимым, а последним – считающееся наименее значимым.

3. Применения

Применим предложенную модель к примерам, описанным в пунктах 1.1 и 1.2.

3.1. Оценка факторов влияния. Подставляя в модель данные примера 1.1 и проводя вычисления по указанным формулам, получаем:

$Q = \{0{,}21, 0{,}26, 0{,}16, 0{,}21, 0{,}16\}$

$\mathrm{T} = \{0{,}07, 0{,}14, 0{,}14, 0{,}20, 0{,}09, 0{,}11, 0{,}05, 0{,}09, 0{,}03, 0{,}08\}$

$$U = \begin{pmatrix} 1{,}68 & 1{,}26 & 2{,}11 & 2{,}11 & 0{,}63 & 1{,}68 & 2{,}11 & 2{,}11 & 2{,}11 & 2{,}11 \\ 1{,}05 & 2{,}63 & 1{,}05 & 1{,}84 & 1{,}56 & 1{,}58 & 2{,}11 & 2{,}11 & 2{,}11 & 0{,}26 \\ 0{,}79 & 0{,}79 & 0{,}79 & 1{,}11 & 0{,}79 & 0{,}79 & 0{,}79 & 0{,}79 & 0{,}95 & 0{,}79 \\ 1{,}26 & 1{,}26 & 1{,}05 & 1{,}05 & 1{,}68 & 0{,}63 & 1{,}05 & 1{,}26 & 1{,}26 & 1{,}26 \\ 0{,}79 & 0{,}32 & 0{,}79 & 0{,}32 & 0{,}32 & 0{,}47 & 0{,}16 & 0{,}32 & 0{,}47 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

$V = \{1{,}79,\ 1{,}65\ 0{,}86{,}1{,}14,\ 0{,}48\}$

$P = \{0{,}30,\ 0{,}28,\ 0{,}15,\ 0{,}19,\ 0{,}08\}$

$R = \{1,\ 0{,}92,\ 0{,}48,\ 0{,}64,\ 0{,}27\}$

$W = \{1{,}79,\ 1{,}65,\ 1{,}14,\ 0{,}86,\ 0{,}48\}$

$J = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

В строке V элемент $v[j]$ с номером j является общей экспертной оценкой влияния j-го фактора. В строке P элемент $p[j]$ с номером j характеризует долю влияния j-го фактора в совокупности всех рассматриваемых факторов. В строке R элемент $r[j]$ с номером j описывает относительное влияние j-го фактора. Строка J показывает, что по экспертным оценкам обозначенные номерами факторы располагаются в порядке убывания их влияния следующим образом: *семья, школа, культура, улица, религия*. Основное влияние на межнациональные отношения школьников, по мнению экспертов, оказывает семья и школа (58%). Культура, улица, религия оказывают в совокупности меньшее влияние (42%). Это представляется правдоподобным. Подчеркнем, что речь идет только о примере применения предлагаемой методики для анализа результатов экспертного опроса. Межнациональные отношения слишком сложны, и их изучение требует специальных глубоких социологических исследований. В частности, нужны уточнения анализируемых в примере понятий семьи, школы, культуры, улицы, религии и степени их влияния на формирование этнического самосознания. Нужно было бы также учитывать взаимную зависимость рассматриваемых факторов, их взаимное влияние.

Приведем для сравнения результаты, которые получаются, если предположить, что эксперты имеют одинаковую узкую компетентность по всем вопросам и одинаковую общую компетентность.

$Q = \{0{,}2,\ 0{,}2,\ 0{,}2,\ 0{,}2,\ 0{,}2\}$

$T = \{0{,}1,\ 0{,}1,\ 0{,}1,\ 0{,}1,\ 0{,}1,\ 0{,}1,\ 0{,}1,\ 0{,}1,\ 0{,}1,\ 0{,}1\}$

$V = \{1{,}70,\ 1{,}24,\ 1{,}06,\ 1{,}12,\ 0{,}62\}$

$P = \{0{,}30, 0{,}22, 0{,}18, 0{,}20, 0{,}11\}$

$R = \{1, 0{,}73, 0{,}62, 0{,}66, 0{,}36\}$

$W = \{1{,}70, 1{,}24, 1{,}12, 1{,}06, 0{,}62\}$

$J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Расположение факторов по влиянию осталось прежним. Изменились только соотношения между ними: семья оценивается как относительно более влиятельный фактор, а школе приписывается относительно меньшее влияние (73% вместо прежних 92%). Их общее влияние остается доминирующим (52%). К тем же выводам приводит и строка средних баллов для рассматриваемых факторов $A = \{8{,}5, 6{,}2, 5{,}3, 5{,}6, 3{,}1\}$.

Аналогичные результаты были получены для группы $m = 325$ экспертов. С учетом их квалификации распределение и относительные величины влияния анализируемых факторов описывались строками

$P = \{0{,}29, 0{,}28, 0{,}14, 0{,}18, 0{,}11\}$

$R = \{1, 0{,}96, 0{,}46, 0{,}63, 0{,}34\}$.

Когда квалификации экспертов не учитывались, эти строки имели вид

$P = \{0{,}29, 0{,}28, 0{,}14, 0{,}18, 0{,}11\}$

$R = \{1, 0{,}77, 0{,}61, 0{,}62, 0{,}49\}$.

Расположение факторов по влиянию осталось тем же самым. Полученная новая строка средних баллов подтверждает это: $A = \{8{,}51, 6{,}56, 5{,}20, 5{,}28, 4{,}18\}$.

3.2. Прогноз эффективности. Подставляя в модель данные примера 1.2 и проводя вычисления по указанным формулам, получаем:

$Q = \{1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7\}$

$T = \{0{,}23, 0{,}77\}$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}14 & 0{,}57 & 0{,}143 & 0{,}057 & 0{,}014 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}029 & 0{,}086 & 0{,}143 \end{pmatrix}$$

$V = \{0, 0{,}003, 0{,}013, 0{,}033, 0{,}035, 0{,}069, 0{,}110\}$

$P = \{0, 0{,}012, 0{,}050, 0{,}125, 0{,}133, 0{,}263, 0{,}417\}$

$R = \{0, 0{,}03, 0{,}12, 0{,}30, 0{,}32, 0{,}63, 1\}$

$W = \{0{,}110, 0{,}069, 0{,}035, 0{,}033, 0{,}013, 0{,}003, 0\}$

$J = \{7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$

В строке V элемент $v[j]$ с номером j является общей экспертной оценкой j-го изменения уровня эффективности. В строке P элемент $p[j]$ с номером j характеризует долю j-й оценки в совокупности всех данных оценок. В строке R элемент $r[j]$ с номером j дает отношение j-й оценки к максимальной. Строка J показывает, что по экспертным оценкам обозначенные номерами уровни изменения эффективности располагаются в порядке убывания величины: 75%, 50%, 25%, 0, –25%, –50%, –75%.

При этом первые 2 оценки вместе имеют в общей совокупности долю 68%. На остальные 5 оценок приходится 32%. Наиболее вероятным представляется увеличение эффективности на 75%. С большей уверенностью на основании полученных экспертных оценок можно прогнозировать увеличение эффективности на 50% или 75%.

Замечание. В статье [2] в качестве экспертной оценки указывается 50%. Этот результат получается при показательном взвешивании и использовании максиминной оценки. Возведение в степень $t[1] = 0{,}3$ оценок $x[1, j]$ первого эксперта дает строку его взвешенных оценок $\{0{,}05, 0{,}76, 1, 0{,}76, 0{,}5, 0\}$. Заметим, что при таком взвешивании уменьшение компетентности эксперта ведет к увеличению его оценок. Возведение в степень $t[2] = 1$ оценок $x[2, j]$ второго эксперта не меняет их: $\{0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 6, 1\}$. Выбирая в этих строках на каждом месте минимальную оценку, получаем строку минимумов $\{0, 0, 0, 0, 0, 0{,}2, 0{,}5, 0\}$. Максимальная этих минимальных оценок прогнозирует повышение эффективности на 50%.

3.3. Математическое ожидание. Близкий результат получается, если использовать вероятностные методы. Элементы теории вероятностей изложены в книге Б.В. Гнеденко и А.Я. Хинчина [3]. Рассмотрим определенную на множестве $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ номеров случайную переменную ξ со значениями: $\xi[1] = -75$, $\xi[2] = -50$, $\xi[3] = -25$, $\xi[4] = 0$, $\xi[5] = 25$, $\xi[6] = 50$, $\xi[7] = 75$.

Распределение случайной переменной ξ определим, используя мультипликативное взвешивание результатов, нормируя данные экспертами оценки и указанные оценки компетентности экспертов. Нормирование по формуле $p[i, j] = x[i, j] / \sum_{r=1}^{7} x[i, k]$ $(1 \le i \le 2,\ 1 \le j \le 7)$ превращает 1-ю и 2-ю строки $X[1]$ и $X[2]$ матрицы X, данных экспертами оценок, соответственно в строки

$P1 = \{0, 0{,}05, 0{,}2, 0{,}5, 0{,}2, 0{,}05, 0\}$

$P2 = \{0, 0, 0, 0, 0{,}11, 0{,}33, 0{,}056\}$

Умножим элементы $p[1, j]$ строки $p1$ на нормированную оценку $t[1] = 0{,}23$ компетентности 1-го эксперта, а элементы $p[2, j]$ строки $p2$ на нормированную оценку $t[2] = 1$ компетентности 2-го эксперта. Складывая результаты, по формуле $Pr[\xi[j]] = t[1]\ p[1, j] + t[2]\ p[2, j]$ $(1 \le j \le 7)$ получаем распределение $Pr = \{0,\ 0{,}011,\ 0{,}046,\ 0{,}115,\ 0{,}132,\ 0{,}268,\ 0{,}428\}$ случайной переменной ξ. На j-м месте в строке Pr стоит вероятность $Pr[\xi[j]]$ того, что случайная переменная ξ примет значение $\xi[j]$. Математическое ожидание $M\xi$ случайной переменной ξ равно $M\xi = \sum_{j=1}^{7} \xi[j]\ \ Pr[\xi[j]] = 47$.

Можно ожидать, что в результате предлагаемых мероприятий эффективность повысится на 47%. Округление дает 50%. Заметим, что $Pr = [\xi \ge 50] = Pr[\xi[6]] + Pr[\xi[7]] = 0{,}268 + 0{,}428 \approx 0{,}7$, т.е. с большой вероятностью эффективность повысится на 50%

или больше. Полученная вероятность 0,696 близка указанной в пункте 3.2 доле 0,68 изменения эффективности на 50% или 75%. Кроме того, $Pr[\xi \geq 0] = Pr[\xi[4]] + Pr[\xi[5]] + Pr[\xi[6]] + Pr[\xi[7]] =$ $= 0{,}115 + 0{,}132 + 0{,}268 + 0{,}428 \approx 0{,}94$.

Основываясь на данной экспертной оценке можно с уверенностью утверждать, что в результате предлагаемых мероприятий эффективность не понизится. Вероятность того, что она повысится на 25% или больше равна приблизительно 83%. Так что в целом экспертиза дает оптимистический прогноз.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ушаков Д.В.* Межнациональные отношения городских школьников. Новосибирск: ИИЦ «Вестник НРСОО», 2006.

2. *Баранов Л.Т., Птушкин Ф.И., Трудов А.В.* Нечеткие множества в экспертном опросе // Социология: методология, методы, математические модели. 2004. № 19. С. 142–157.

3. *Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я.* Элементарное введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1982.